

# 小波图象编码中的对称边界延拓法

乔世杰

(西安交通大学电信学院, 西安 710049)

**摘要** 在小波变换图象编码中, 由于图象信号是有限长信号, 在子带分解过程中信号边界将外延, 因此为满足完全重构条件, 且不增加信号的样本总数, 必须对信号边界进行延拓. 该文对小波变换图象编码中的对称周期延拓法进行了论述, 并叙述了其原理及实现方法, 还讨论了如何根据滤波器长度为奇数或偶数的不同, 相应地延拓输入信号, 并恰当地截取出所需长度的子带信号. 同时, 讨论了综合时如何对子带信号进行延拓的问题.

**关键词** 小波变换 图象编码 边界延拓 周期延拓 对称周期延拓

中图法分类号: TN919.8 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2000)09-0725-05

## The Symmetric Extension Method for Wavelet Transform Image Coding

QIAO Shi-jie

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

**Abstract** This paper discusses the symmetric periodic extension method, which can be used to extend the finite length signal before filtering in the wavelet transform image coding. This method can avoid the expansion of subband image size and achieve perfect reconstruction. The odd and even length filters use different method to extend the signals.

**Keywords** Wavelet transform, Image coding, Boundary extension, Periodic extension, Symmetric periodic extension

## 0 引言

由于小波变换在时域和频域同时具有良好的局部性质, 而且具有描述非平稳图象信号的本领和适应人的视觉特性等良好性质, 因而成为图象编码领域研究的热点. 小波变换的最大特点是可以多分辨率地描述图象信号, 并可对图象信号分解为一组多尺度的子带图象, 且分解后的各子带图象相对平稳, 易于编码. 然而, 由于图象信号是有限长信号, 在子带分解过程中, 信号边界将外延. 为满足完全重构条件, 其严格重抽样的子带信号的样本数将增加, 这将使压缩效率降低. 为解决这个问题, 必须对信号的边界进行适当延拓, 使其成为无限长信号, 从而满足完全重构和不增加信号样点总数的条件, 但所用的延拓方法必须避免引入新的失真, 且不影响压缩效果.

## 1 小波变换的基本原理

小波变换或小波分解就是将任一平可积或能量有限信号表示成小波系数的叠加. 在信号离散情况下, Mallat 利用多分辨率分析的概念, 提出了离散小波变换的快速算法<sup>[1]</sup>. 以一维为例, 设原始离散信号  $C^0$  经过一级小波变换分解为一低频分析信号  $C^1$  和一高频细节信号  $d^1$ , 而其低频分析信号  $C^1$  又可以进一步分解为低频信号  $C^2$  和高频信号  $d^2, \dots$ , 从而完成数据的金字塔型分解. 一般, 对任意正整数  $N$ , 算法可描述为

$$\begin{cases} C_k^j = \sum_{n \in Z} h_0(2k - n) C_n^{j-1} \\ d_k^j = \sum_{n \in Z} h_1(2k - n) C_n^{j-1} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中  $h_0, h_1$  为分解低通和高通小波滤波器. 将

信号  $C^0$  分解为  $d^1, d^2, \dots, d^N$  和  $C^N$  的过程称为信号的有限小波分解. 其中  $d^1, d^2, \dots, d^N$  和  $C^N$  称为小波系数.

与分解算法相对应的重构算法为

$$C_k^{-1} = \sum_{n \in Z} g_0(k-2n) C_n^i + \sum_{n \in Z} g_1(k-2n) d_n^i \quad (2)$$

其中  $g_0, g_1$  为综合低通和高通小波滤波器.

从滤波器组的观点来看, 上述的分解与重构算法是一典型的二带分析/综合系统(如图1所示).

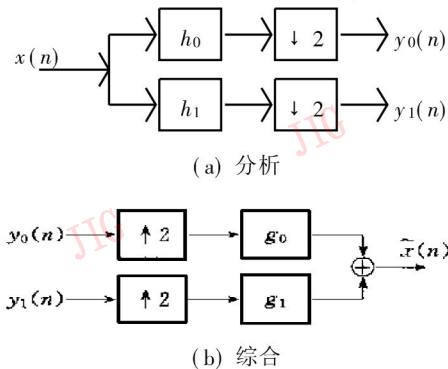


图1 二带分析/综合系统

图1中信号的输入和输出的关系可以表示为

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} X(z) [H_0(z) G_0(z) + H_1(z) G_1(z)] + \frac{1}{2} X(-z) [H_0(-z) G_0(z) + H_1(-z) G_1(z)] \quad (3)$$

适当选择滤波器, 可使其满足消除混叠, 且完全重构的条件

$$H_0(-z) G_0(z) + H_1(-z) G_1(z) = 0 \quad (4)$$

$$H_0(z) G_0(z) + H_1(z) G_1(z) = 2z^{-m} \quad (5)$$

其中,  $m$  为由分析/综合滤波器组引入的延迟.

小波变换的滤波器组一般选择双正交对称滤波器组. 由于对称滤波器组具有线性相位特性, 因而可以减小重建图象的失真, 而且利用对称性可以减少一半左右的计算量.

用可分离滤波器, 上述算法可以推广到二维图象信号的情形. 首先对图象的每一行进行变换, 然后再对图象的每一列进行变换, 得到代表原图不同频率特性和方向特性的4个子带图象, 其分别表示为 LL、HL、LH 和 HH. 其中 LL 为能量集中的低频子带, 体现灰度变化; HL 为水平高频垂直低频子带, 具有垂直边缘信息; LH 为水平低频、垂直高频子带, 具有水平边缘信息; HH 为水平高频垂直高频子带, 具有对角边缘信息. LL 子带可进一步分解为4个子带. 若分解层数为  $K$ , 则总的子带数为  $3K+1$ .

## 2 小波变换的边界处理

在上述的小波变换算法中, 都是假定数据  $C^0$  是双向无限的, 且严格重抽样的子带信号样本总数不会增加. 但在实际的图象处理中, 图象数据一定是有限的, 因此必须对图象的边界进行妥善处理. 由式(1)可以看出, 分解算法实质上就是先计算图象信号和分解滤波器的卷积, 然后将卷积结果进行隔点抽取, 以形成子带信号. 由于一个长度为  $N$  的输入信号和一个长度为  $L$  的滤波器卷积所得信号的长度为  $N+L-1$ , 大于输入信号长度  $N$ , 因此上述算法中, 严格重抽样的子带信号样本总数将大于原始输入信号的长度. 当滤波器长度较大时, 这种样本数的增加是相当大的, 尤其对二维图象信号而言, 更为严重. 这不但使所需存储的数据量增大, 更使压缩效率大大降低. 为了从根本上解决这个问题, 必须使用如图2所示的具有边界延拓功能的二带分析/综合系统.

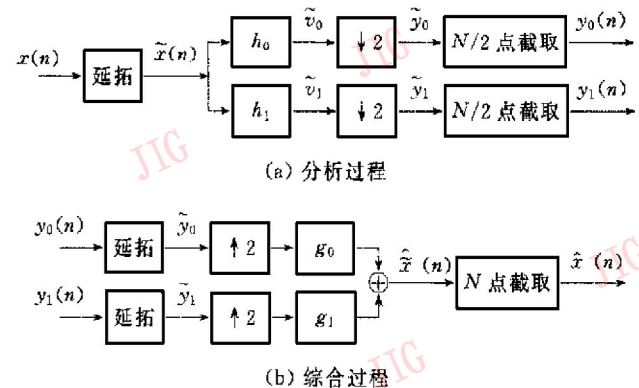


图2 具有延拓功能的二带分析/综合系统

利用该系统进行边界处理时, 首先, 在变换前对输入信号边界进行延拓, 使其成为无限长信号, 再通过滤波并隔点抽取以后, 在不丢失信息的情况下, 适当截取部分变换系数作为子带信号, 从而使分解过程不增加信号的样本总数.

为实现完全重构, 在综合以前, 同样也必须对有限长子带信号进行延拓, 然后向上抽取并滤波, 对滤波后相加的结果适当截取, 就可以完全恢复原始输入信号. 如此, 既满足了完全重构条件, 又没有增加信号的样本总数.

文献[2]给出了几种基本的延拓方法, 主要有零填充法、边界元素复制法、周期延拓法、对称周期延拓法及双倍对称延拓法. 以上方法中, 零填充法和边界元素复制法性能较差, 而双倍对称延拓法计算又太复杂, 因此, 通常广泛使用的是周期延拓法和对称

周期延拓法.

文献[3]研究了周期延拓法和对称周期延拓法应用于子带编码的情形, 并指出了周期延拓法虽然操作简单, 且对滤波器没有特殊的要求, 但其编码性能却与具体图象特性有关, 因为如果图象的两个边缘差别很大, 周期延拓法将会在图象边界处引入严重的不连续性, 从而扩展了高频子带的动态范围. 这不但影响编码性能, 而且量化以后, 会在重建图象的边缘产生失真. 可是对称周期延拓法则可获得较为平滑的图象边界, 因而有效地克服了周期延拓法的不足. 但文献[2]、[3]中的对称周期延拓法都只局限于使用偶数长度的对称滤波器. 文献[4]也研究了多速率滤波系统中的对称周期延拓的一般情形. 本文则是对这一方法作进一步探讨.

为讨论简单起见, 假设输入信号长度  $N$  为偶数.

### 3 对称周期延拓法

众所周知, 对称周期延拓法是将输入信号对称地、周期地进行延拓. 因此, 一个样本序列可以拥有两种类型的对称性质, 分别称为全样本 (Whole-sample) 对称和半样本 (Half-sample) 对称. 全样本对称序列的对称中心位于序列中的一个样本点上; 而半样本对称序列的对称中心则位于序列中的两个样本的中点上; 反对称情形也类似地有全样本反对称和半样本反对称. 因此当对一个有限长序列进行对称周期延拓时, 在序列的每个边界都有 4 种延拓方法, 两个边界共有 16 种不同的方法. 由于对称周期延拓的目的是为了增加序列在边界处的连续性, 本文只考虑其中的 4 种 (如图 3 所示), 分别为半样本对称 (HS)、全样本对称 (WS) 周期序列, 及两种与其对应的反对称情形, 即半样本反对称 (HA)、全样

本反对称 (WA) 周期序列.

下面给出 HS、WS 的定义, 反对称情形类似.

(1) 半样本对称周期序列 (HS)

$$\tilde{x}_{HS}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{HS}(n - 2Nk) \quad (6)$$

$$x_{HS}(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ x(-n - 1) & -N \leq n \leq -1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (7)$$

(2) 全样本对称周期序列 (WS)

$$\tilde{x}_{WS}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{WS}(n - 2(N - 1)k) \quad (8)$$

$$x_{WS}(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ x(-n) & -(N - 2) \leq n \leq -1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

当使用对称周期延拓方法时, 对使用的小波滤波器组也提出了对称性的要求.

对称的 FIR 滤波器有 4 种类型, 分别称为类型 A、B、C、D.

- (A)  $h_A(n) = h_A(L - 1 - n)$   $L$  为偶数
  - (B)  $h_B(n) = h_B(L - 1 - n)$   $L$  为奇数
  - (C)  $h_C(n) = -h_C(L - 1 - n)$   $L$  为偶数
  - (D)  $h_D(n) = -h_D(L - 1 - n)$   $L$  为奇数
- (10)

其中  $0 \leq n \leq L - 1$ . 偶数长度的滤波器具有半样本对称或反对称特性, 而奇数长度的对称滤波器具有全样本对称或反对称特性.

可以证明, 对称周期序列与对称滤波器的卷积仍是对称的周期序列, 但对称类型会因所使用的滤波器的不同而可能发生变化.

**性质 1** 设序列  $\tilde{x}(n)$  关于  $R/2$  对称, 即  $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(R - n)$ ; 序列  $h(n)$  关于  $S/2$  对称, 即  $h(n) = h(S - n)$ , 那么, 序列  $\tilde{v}(n) = \tilde{x}(n) * h(n)$  关于  $(R + S)/2$  对称.

根据性质 1, 如果一个有  $N$  个唯一样本的 HS 序列  $\tilde{x}(n)$ , 其对称中心位于  $-1/2$  和  $N - 1/2$ , 而另一个长度  $L$  为偶数、类型为 B 的滤波器  $h(n)$  的对称中心位于  $-1/2$ , 那么卷积  $\tilde{v}(n)$  的对称中心将位于  $-1$  和  $N - 1$ . 因此,  $\tilde{v}(n)$  是一个 WS 序列, 且有  $N + 1$  个唯一的样本. 同理, 可以得出其它不同类型的对称序列与不同类型的滤波器卷积的结果, 如表 1 所示.

小波分解时, 要使对称周期延拓后的序列  $\tilde{x}(n)$  与滤波器  $h(n)$  的卷积  $\tilde{x}(n)$ , 在隔点抽取以后, 能截取有限的  $N/2$  个唯一样本, 而不丢失信息, 这就要求隔点抽取所得到的序列  $\tilde{y}(n)$  仍然必须具有对称

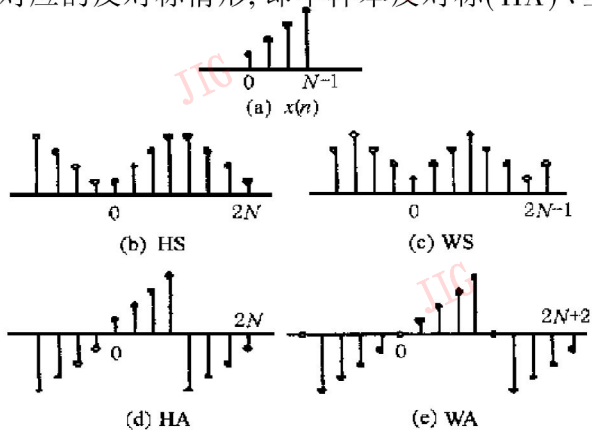


图 3

表1 对称序列与对称滤波器卷积的类型

序列类型	滤波器类型			
	A	B	C	D
HS	WS	HS	WA	HA
WS	HS	WS	HA	WA
HA	WA	HA	WS	HS
WA	HA	WA	HS	WS

性和周期性. 由对称周期序列的特征可知, 只有当  $\tilde{v}(n)$  是 WS 或 WA 序列的时候, 才满足这个条件. 参考表 1, 有如下结论, 即在进行小波分解的时候, 如果使用偶数长度的对称滤波器, 那么输入序列  $x(n)$  必须延拓成半样本对称/反对称周期序列; 如果使用奇数长度的对称滤波器, 输入序列  $x(n)$  则必须延拓成全样本对称/反对称周期序列. 一般情况下, 都是根据滤波器的对称/反对称性质相应地对称/反对称地周期延拓输入序列, 这样卷积所得的序列都为 WS 序列.

由于卷积所得 WS 序列可能具有大于  $N$  的唯一样本值, 因此为了唯一地抽取  $N/2$  个样本的子带信号, 必须对滤波器作适当移位. 为了具体地说明如何根据滤波器的不同, 来相应地延拓输入序列, 我们举两个简单的例子. 其所使用的滤波器分别为<sup>[5]</sup>

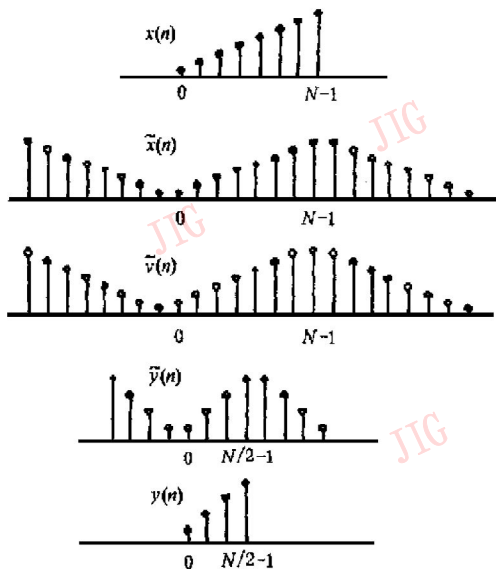
## (1) 偶数长度

$$\sqrt{2}H(z) = (1+z) \quad (11)$$

## (2) 奇数长度

$$\sqrt{2}H(z) = 2^{-2}(-z^{-2} + 2z^{-1} + 6 + 2z - z^2) \quad (12)$$

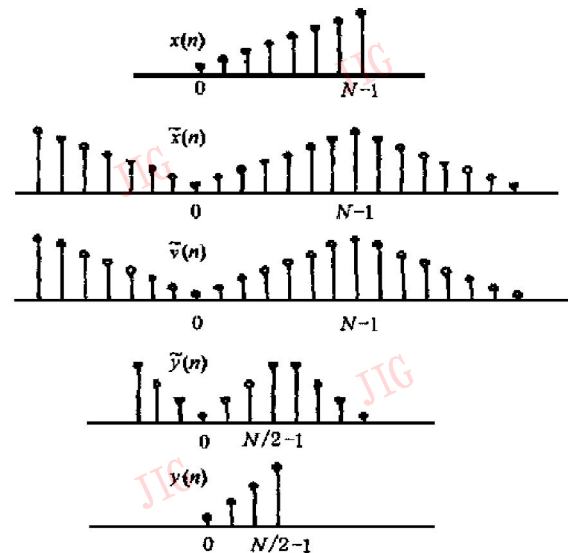
在使用偶数长度滤波器, 对图 4 中的  $x(n)$  进行小波变换时, 首先, 对输入序列  $x(n)$  进行半样本对

图4 偶数长度滤波器,  $x(n)$  半样本对称周期延拓

称周期延拓, 以得到 HS 序列  $\tilde{x}(n)$ ; 然后对滤波器  $h(n)$  移位, 使其关于  $-1/2$  对称, 那么,  $\tilde{x}(n)$  和  $h(n)$  的卷积  $\tilde{v}(n)$  就是一个对称于  $n=-1$  和  $n=N-1$  的 WS 序列, 有  $N+1$  个唯一的样本值. 由于  $N+1$  为奇数(输入  $N$  为偶数), 隔点抽取可获得有  $N/2$  个或  $N/2+1$  个唯一样本的序列  $\tilde{y}(n)$ . 如图 4 的排列恰好可获得  $N/2$  个唯一样本, 再进行  $N/2$  点截取, 即可获得  $N/2$  个样本的子带信号  $y(n)$ . 倘若对输出延迟一个样本再进行抽取, 则恰好可获得  $N/2+1$  个唯一样本, 但这样将会使子带样本总数增加, 因此, 这不是我们所期望的.

由此可见, 对于偶数长度的对称滤波器, 输入序列必须进行半样本对称周期延拓, 同时分析滤波器应当给出半个样本的超前.

在使用奇数长度对称滤波器进行小波变换时(图 5). 首先, 对输入序列  $x(n)$  进行全样本对称周期延拓, 以得到 WS 序列  $\tilde{x}(n)$ ; 然后对滤波器  $h(n)$  移位, 使之对输出或者没有延迟, 或者仅有一个样本的超前, 则  $\tilde{x}(n)$  与  $h(n)$  的卷积  $\tilde{v}(n)$  是一个或者对称于  $n=0$  和  $n=N-1$  的 WS 序列, 或者是对称于  $n=-1$  和  $n=N-2$  的 WS 序列, 二者都只有  $N$  个唯一的样本值, 从而隔点抽取都可获得  $N/2$  个唯一样本. 图 5 示出了第一种情形.

图5 奇数长度滤波器,  $x(n)$  全样本对称周期延拓

由此可见, 对于奇数长度的对称滤波器, 输入序列必须进行全样本对称周期延拓, 同时分析滤波器应当没有延迟, 或者仅有一个样本的超前.

由上面的分析及图 4、图 5 可知, 综合的时候, 对偶数长度的滤波器, 必须对长度为  $N/2$  的子带信号

进行半样本对称周期延拓, 然后向上插值. 对奇数长度的滤波器, 其长度为  $N/2$  的子带信号的对称周期延拓则分两种情形: ① 若分析滤波器的延迟为零, 则在子带样本的左端进行全样本对称延拓, 而在右端进行半样本对称延拓; ② 若分析滤波器有一个样本的超前, 则正好相反, 在左端进行半样本对称延拓, 而右端进行全样本对称延拓, 然后向上插值. 另外, 对综合滤波器适当移位可使总的系统延时为零.

## 4 实验结果及结论

我们用  $9/7$  长度的对称滤波器<sup>[5]</sup>, 对 Lena、Barbara 及 Goldhill 3 幅标准灰度图象 ( $512 \times 512$ ) 进行了 5 层小波变换后, 不进行编码, 立即重构, 可完全恢复原图象. 同时, 我们还采用快速 SPIHT 方案<sup>[6]</sup>, 对其进行压缩编码, 其边界延拓分别采用周期延拓法和本文讨论的对称周期延拓法. 其在象素比特数为  $0.25\text{bpp}$  (bits/pixel) 下重建图象和原始图象的峰值信噪比  $PSNR$  示于表 2. 从表中可以看出, 对称周期延拓法的  $PSNR$  平均高出周期延拓法  $0.3\text{dB}$  左右.

表 2 周期延拓与对称周期延拓的  $PSNR$  对比 (dB)

测试图象	延拓方法	
	周期延拓	对称周期延拓
Lena	33.21	33.59
Barbara	26.84	27.04
Goldhill	29.72	30.06

实验表明, 本文所讨论的对称周期延拓法有效地解决了子带分解过程中信号边界外延的问题. 由于对称周期延拓法保持了信号在边界处的连续性, 故量化编码以后的重建图象边缘失真较小.

## 参 考 文 献

- 1 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans. On PAMI, 1989, 11 (7): 674~ 693.
- 2 Karlsson G, Vetterli M. Extension of finite length signals for sub-band coding. SP, 1989, 17: 161~ 168.
- 3 Smith M J T, Eddins S L. Analysis/synthesis techniques for subband image coding. IEEE Trans. on ASSP, 1990, 38: 1446 ~ 1456.
- 4 Bamberger R H, Eddins S L, Nuri V. Generalized symmetric extension for size-limited multirate filter banks. IEEE Trans. on IP, 1994, 3: 82~ 87.
- 5 Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal base of compactly supported wavelets. Commun. Pure Appl. Math. 1992, 45: 485~ 560.
- 6 Said A, Pearlman W A. A new, fast, and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. IEEE Trans. on Circuit and System for Video Technology. 1996, 6 (3): 243~ 249.



乔世杰 西安交通大学微电子学博士生. 研究兴趣包括小波变换在图象及视频压缩中的应用、小波变换的 VLSI 实现等.

## Proceeding of ICIG'2000

### First International conference on Image and Graphics

## 征 订 通 知

2000 年 8 月 16 日~ 18 日在天津召开的“首届国际图象图形学术会议”已圆满结束. 同时出版了一本论文集, 作为中国图象图形学学会会刊《中国图象图形学报》的增刊(英文版), 已开始发行. 如有需要此论文集者, 请将订书款汇至北京市海淀区花园路 6 号《中国图象图形学报》编辑部(邮编: 100088), 书价为 120 元.